Curvas Cónicas para Dibujo y Matemáticas.

Aplicación web

Dibujo Técnico para ESO y Bachillerato
Matemáticas para Bachillerato
Educación Plástica y Visual

Autor:
José Antonio Cuadrado Vicente.

ESTUDIO GRÁFICO DE LA ELIPSE.

CURVAS CÓNICAS:

La superficie cónica de revolución está engendrada por una recta que gira alrededor de otra a la que corta. Esta segunda recta es el **eje** de la superficie y la recta que gira es la **generatriz**. El punto de intersección de ambas es el vértice de la superficie.

Recibe el nombre de **cónicas** las curvas que resultan de la intersección de una superficie cónica por un plano.

CLASES DE CÓNICAS:

- La circunferencia.

Si el plano secante a la superficie cónica de revolución es perpendicular al eje de la misma y no pasa por el vértice, la sección que se obtiene es **una circunferencia.**

- La elipse.

Si el plano secante es oblicuo al eje de la superficie cónica, corta a todas las generatrices y no pasa por el vértice, la sección que produce es una curva cerrada que recibe el nombre de **elipse.**

- La hipérbola.

Si el plano secante es paralelo al eje de la superficie cónica, o lo que es igual, es paralelo a dos generatrices, la sección es una curva abierta con dos ramas que se llama **hipérbola.**

- La parábola.

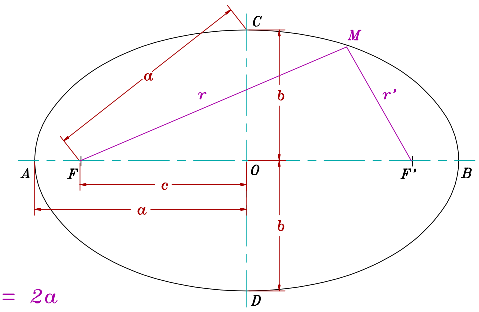
Si el plano secante es paralelo a una sola generatriz de la superficie, a esta generatriz no la cortará y la curva será abierta con un punto en el infinito; la sección que se produce es una **parábola.**

- Cónica degenerada.

Si el plano secante pasa por el vértice de la superficie, la sección obtenida es una **cónica degenerada** y puede ser **un punto, una recta o un par de rectas que se cortan** según que el plano secante tenga menor, igual o mayor inclinación que las generatrices de la superficie.

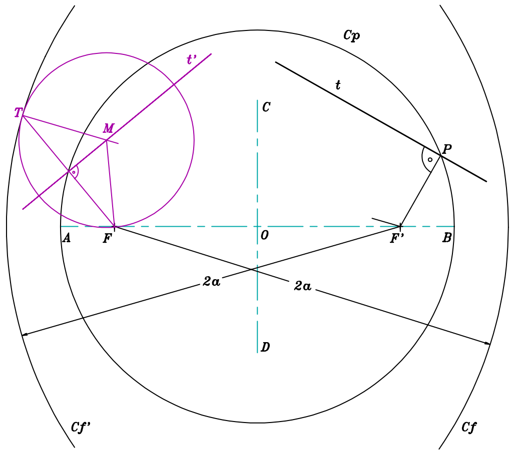
PROPIEDADES DE LA ELIPSE:

La elipse es una curva cerrada y plana, cuyos puntos constituyen un lugar geométrico que tienen la propiedad de que la suma de distancias de cada uno de sus puntos a otros dos, fijos, F y F', llamados focos, es constante e igual a 2a, siendo 2a la longitud del eje mayor AB de la elipse.



$r + r' = 2a$

$a^2 = b^2 + c^2$



Tiene dos ejes perpendiculares que se cortan en el punto medio O, centro de la curva. El eje mayor AB se llama eje real y se representa por 2a. El eje menor CD se representa por 2b. Los focos están en el eje real. La distancia focal F-F'se representa por 2c.

Entre a, b y c existe la relación: $a^2=b^2+c^2$

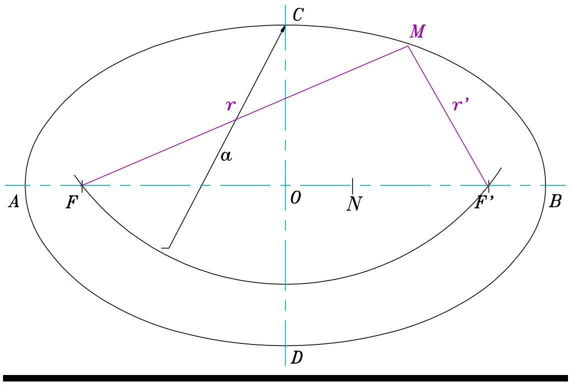
La elipse es simétrica respecto de los dos ejes y, por tanto, respecto del centro O. Las rectas que unen un punto M de la curva con los focos, se llaman radio vectores r y r'y por la definición se verifica: r+r'=2a.

La circunferencia principal C_p de la elipse es la que tiene por centro el de la elipse y radio a. Se define como el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas por los focos a cada una de las tangentes. **Las circunferencias focales** C_f y $C_{f'}$ de la elipse tienen por centro uno de los focos y radio 2a.

La elipse se puede definir también como el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por un foco y son tangentes a la circunferencia focal del otro foco.

Si tenemos un diámetro de la elipse, el **diámetro conjugado** con él es el lugar geométrico de los puntos medios de todas las cuerdas paralelas al primero. Los ejes son dos diámetros conjugados y los únicos que son perpendiculares. En la circunferencia todas las parejas de diámetros conjugados son perpendiculares.

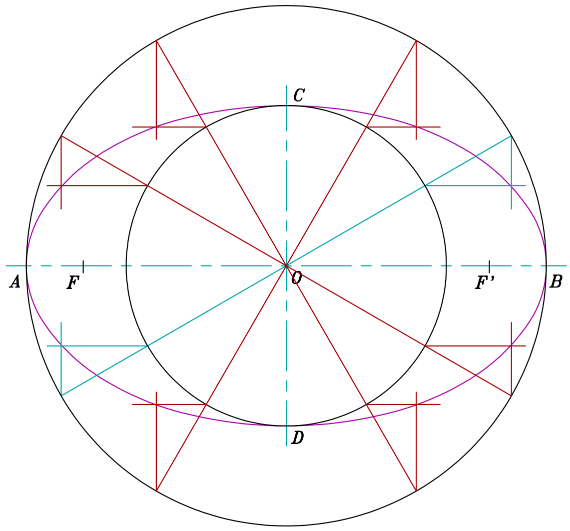
CONSTRUCCIÓN DE LA ELIPSE POR PUNTOS A PARTIR DE LOS EJES:



Se conocen los ejes AB=2a y CD=2b. Con centro en C o D y radio a, se corta al eje mayor en F y F', focos de la curva.

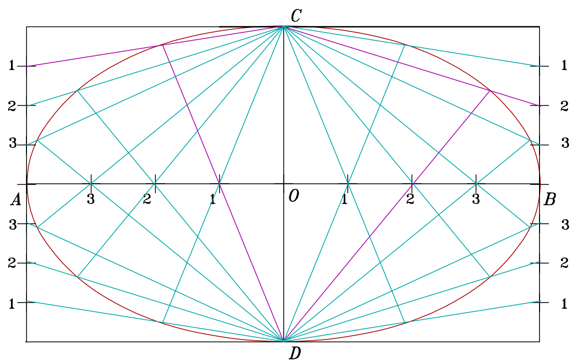
Se toma un punto N cualquiera en el eje mayor; con radio AN y centro en F se traza el arco 1 y con radio NB y centro en F', se traza el arco 2; estos dos arcos se cortan en el punto M de la elipse. De esta forma, la suma de distancias de M a F y F' es igual a AB = AN + NB = 2a. Repitiendo esta operación y tomando otros puntos en el eje mayor entre F y F' se van determinando puntos de la curva que se unen con plantilla.

TRAZADO DE LA ELIPSE POR PUNTOS MEDIANTE LA CIRCUNFERENCIA PRINCIPAL Y LA DE DIAMETRO 2b.



Se traza una circunferencia que pase por los extremos del eje mayor y otra que pase por los del eje menor. Se dibuja un radio cualquiera que corte a las dos circunferencias, por el punto de corte de este con la circunferencia menor se traza una paralela al eje mayor AB, y por el punto de corte con la circunferencia mayor se traza una paralela al eje menor CD, el corte con la anterior será un punto de la elipse. Se repite esta operación numerosas veces.

TRAZADO DE LA ELIPSE POR HACES PROYECTIVOS A PARTIR DE LOS EJES AB Y CD:



Se construye el rectángulo que pase por los extremos de los ejes y se divide la mitad del eje mayor y la mitad del lado menor del rectángulo en el mismo número de partes iguales. Los rayos C1, C2, C3... se cortan respectivamente con los rayos D1, D2, D3... en puntos de la elipse.

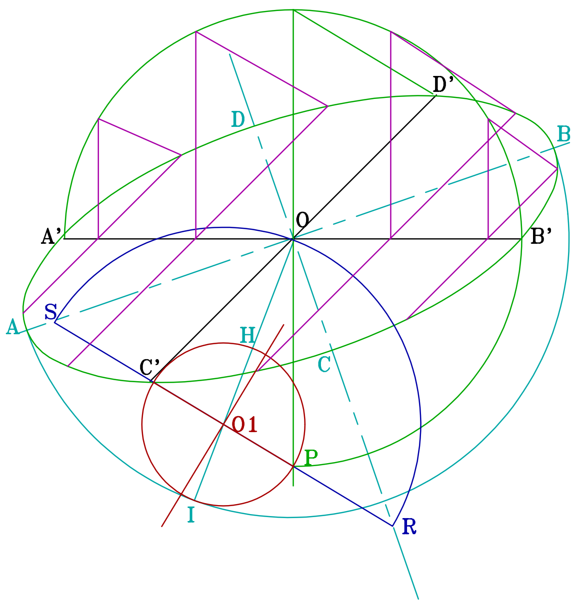
TRAZADO DE LA ELIPSE POR HACES PROYECTIVOS A PARTIR

DE UNA PAREJA DE DIÁMETROS CONJUGADOS:

Se opera como en el caso anterior. En este caso, el rectángulo se transforma en un romboide formado por las tangentes a la elipse en los extremos de los diámetros conjugados y que son paralelos a ellos.

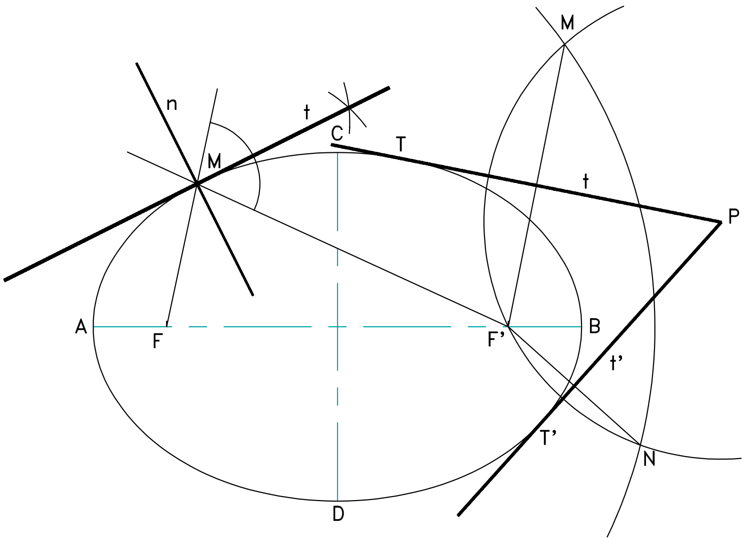
DADA UNA ELIPSE POR UNA PAREJA DE DIÁMETROS CONJUGADOS, HALLAR LOS EJES:

Por el centro O se traza la perpendicular a A'B' y se leva OP = OA'; se une P con C' y se traza la circunferencia de centro O_1 y radio O_1O se traza la semicircunferencia ROS; uniendo O con R y S se obtienen los ejes de la elipse en posición. La magnitud de ellos es: a=OI y b=OH, que se llevan sobre cada uno de ellos respectivamente.



TRAZADO DE LA TANGENTE Y NORMAL EN UN PUNTO DE LA ELIPSE:

La tangente a la elipse en un punto M de ella es la recta t, bisectriz exterior del ángulo que forman los radios vectores MF y MF'. La normal a la elipse en M es la perpendicular n a la tangente t.



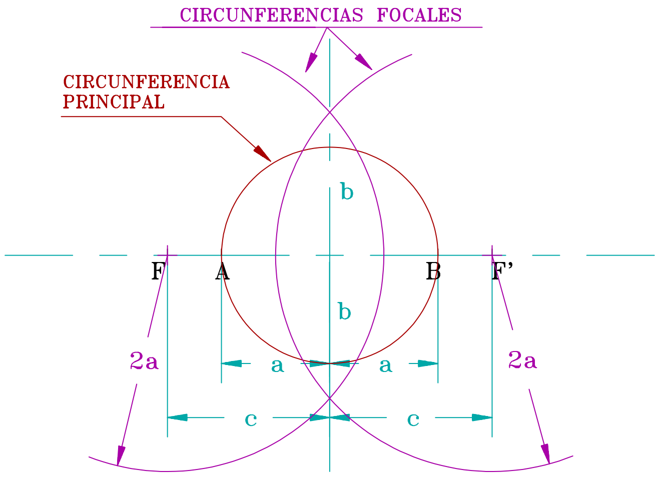
TANGENTES A LA ELIPSE DESDE UN PUNTO EXTERIOR P:

Sabiendo que la circunferencia focal es el lugar geométrico de los puntos simétricos del otro foco respecto de las tangentes, tenemos que buscar un punto de ella que, unido con F', resulte ser una cuerda de la circunferencia de centro P y radio PF'.

Según esto, se traza la circunferencia focal de centro F y la de centro P y radio hasta el otro foco F', las cuales se cortan en los puntos M y N; se unen estos puntos con F' y se trazan las mediatrices de los segmentos F'M y F'N, las cuales pasarán por P y serán las tangentes de la elipse. Los puntos de tangencia se obtienen al unir M y N con el foco F que es centro de la focal.

CURVAS CÓNICAS
ESTUDIO GRAF. DE LA HIPÉRBOLA.

PROPIEDADES DE LA HIPÉRBOLA:



La hipérbola es una curva plana, abierta, con dos ramas; se define como el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a otros dos fijos, llamados focos, es constante e igual a 2a = AB, la longitud del eje real.

Tiene dos ejes perpendiculares que se cortan en el punto medio O, centro de la curva. El eje mayor AB se llama eje real y se representa por 2a; el eje menor se representa por 2b y se llama imaginario porque no tiene puntos comunes con la curva. Los focos están en el eje real. La distancia focal se representa por 2c.

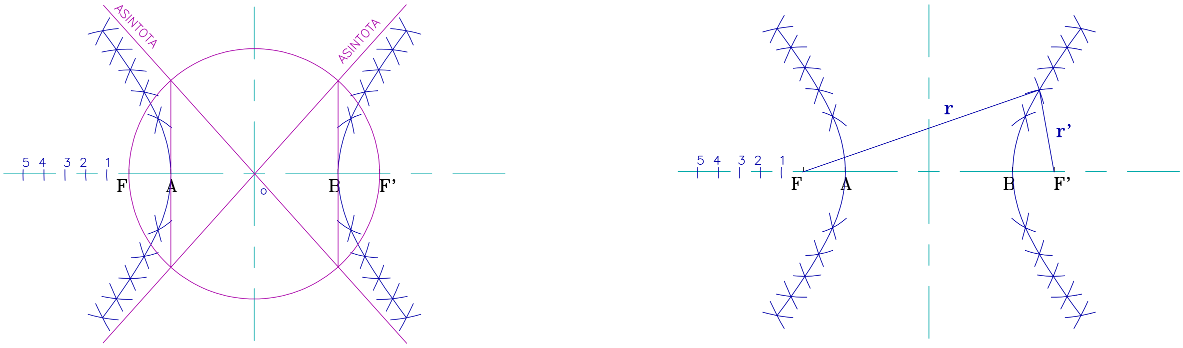
Entre a, b y c existe la relación $c^2 = a^2 + b^2$.

La hipérbola es simétrica respecto de los dos ejes y, por lo tanto respecto del centro O. Las rectas que unen un punto M de la curva con dos focos, se llaman **radios vectores** r y r' y por definición se verifica: r - r' = 2a.

La circunferencia principal de la hipérbola es la que tiene por centro O y radio 2a. Se define como el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas por los focos a cada una de las tangentes. **Las circunferencias focales** tienen por centro los focos y radio a.

La hipérbola, como la elipse, se puede definir como el lugar geométrico de los centros de circunferencias que pasan por un foco y son tangentes a las circunferencias focales del otro foco.

Las asíntotas de la hipérbola son las tangentes a la curva en los puntos del infinito. Estas asíntotas son simétricas respecto de los ejes y pasan por el centro de la curva.

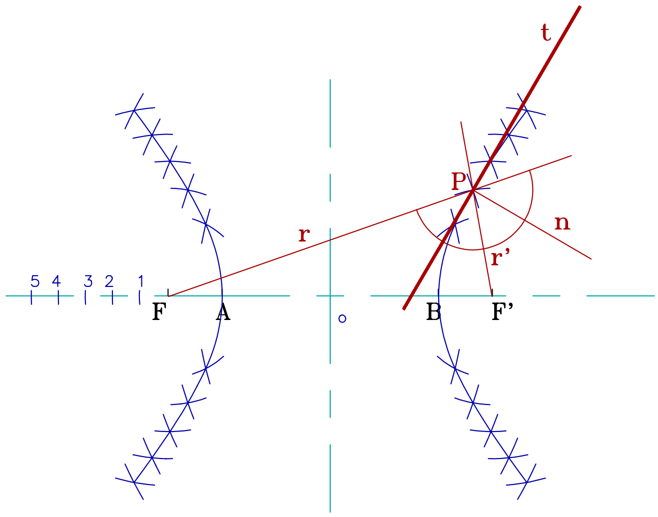


CONSTRUCCIÓN DE LA HIPÉRBOLA POR PUNTOS A PARTIR DE LOS EJES:

Los datos son: 2a = AB y 2c = FF'. Se toma el punto 1 en el eje real AB y con radios A1 y B1 y centros en F y F' se trazan dos arcos que se cortan en un punto de la hipérbola. Se repite el proceso varias veces y se unen los puntos con plantilla.

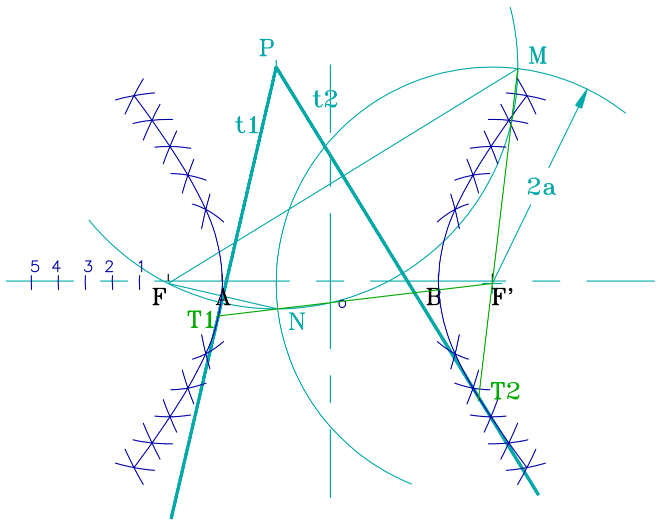
TRAZADO DE LA TANGENTE Y NORMAL A LA HIPÉRBOLA EN UN PUNTO P DE ELLA:

La tangente y la normal en un punto P de la hipérbola, al igual que en la elipse, son las bisectrices de los ángulos que forman los radios vectores r y r' del punto P.



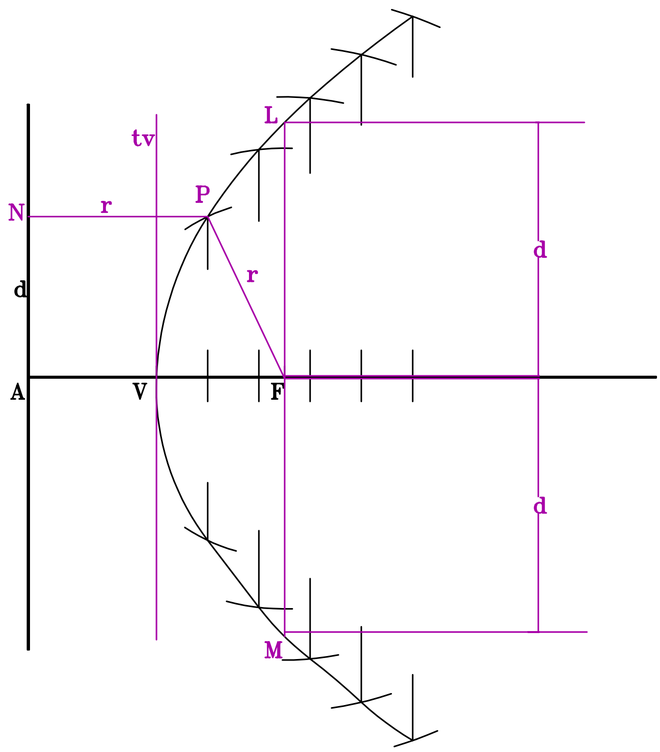
TANGENTES A LA HIPÉRBOLA DESDE UN PUNTO EXTERIOR:

Se traza la circunferencia focal de centro F' y la circunferencia de centro el punto P, dado, y que pasa por el otro foco F; estas dos circunferencias se cortan en los puntos M y N que, unidos con F, nos dan los segmentos MF y NF; las mediatrices de estos segmentos pasan por P y son las tangentes a la hipérbola. Los puntos de tangencia T_1 y T_2 se obtienen uniendo F' con N y M hasta que corten a las tangentes.



CURVAS CÓNICAS
ESTUDIO GRÁFICO DE LA PARÁBOLA.

PROPIEDADES DE LA PARÁBOLA:



La parábola es una curva plana, abierta y de una rama. Se define como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo F, llamado foco, y de una recta fija d, llamada directriz. Tiene un vértice v y un eje de simetría que pasa por v y por el foco y es perpendicular a la directriz. La tangente en el vértice de la curva es paralela a la directriz.

El vértice, como otro punto cualquiera, equidista de la directriz y del foco, por lo tanto estará colocado en el punto medio del segmento AF.

La directriz d de la curva hace de circunferencia focal de la parábola, en este caso de radio infinito. Según esto, la directriz es el lugar geométrico de los puntos simétricos del foco respecto de cada tangente.

La tangente en el vértice, que es una recta, hace de circunferencia principal y se define como en las curvas anteriores.

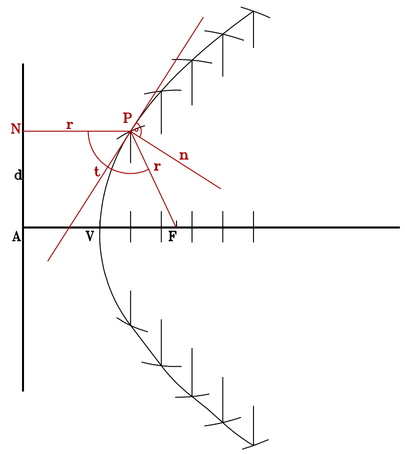
El foco equidista del punto de tangencia de una tangente y del punto donde ésta corta al eje de la curva.

CONSTRUCCIÓN DE LA PARÁBOLA POR PUNTOS:

Se conocen la directriz d, el eje y el foco. El vértice V es el punto medio del segmento AF. Se traza por un punto 1 del eje, la perpendicular a éste y con centro en F y radio A1=r, se corta a dicha perpendicular, obteniendo el punto P y su simétrico, que son puntos de la curva; se obtiene así r= PF = PN, según la definición de la curva; esta operación se repite para obtener nuevos puntos que se unen con plantilla de curvas.

TRAZADO DE LA TANGENTE Y DE LA NORMAL EN UN PUNTO M DE LA PARÁBOLA.

La tangente t en un punto M de la parábola es la bisectriz de los radios vectores MN y MF; la normal n es perpendicular a la tangente.



TANGENTES A LA PARÁBOLA DESDE UN PUNTO EXTERIOR.

Sea el punto P; se traza la circunferencia de radio PF y centro en P, la cual corta a la directriz, que en la parábola hace de circunferencia focal de radio infinito, en los puntos 1 y 2. Las mediatrices de los segmentos 1F y 2F son las tangentes t_1 y t_2. Los puntos de tangencia T_1 y

T_2 se obtienen trazando por 1 y 2 los radios vectores que son paralelos al eje. Las tangentes halladas cortan a la tangente en el vértice t_v en los puntos 3 y 4 que son los pies de las perpendiculares trazadas por el foco de las tangentes.